Een hoek van 45 graden

17 maximumscore 6

- Voor de coördinaten van Q geldt: $a^2 + b^2 = 125$ — 1
- $\cos\angle(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}) = \dfrac{9a + 27b}{9\sqrt{10} \cdot 5\sqrt{5}}$ — 1
- Hieruit volgt $\dfrac{9a + 27b}{9\sqrt{10} \cdot 5\sqrt{5}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$ — 1
- Herleiden tot $a + 3b = 25$ — 1
- Het stelsel $\begin{cases} a + 3b = 25 \\ a^2 + b^2 = 125 \end{cases}$ geeft $b^2 - 15b + 50 = 0$ (of $a^2 - 5a - 50 = 0$) — 1
- De mogelijke coördinaten van Q zijn $(-5, 10)$ en $(10, 5)$ — 1

of

- Voor de coördinaten van Q geldt: $a^2 + b^2 = 125$ — 1
- Noem de mogelijke punten Q_1 en Q_2; als $\overrightarrow{OQ_1} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dan $\overrightarrow{OQ_2} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ — 1
- $\overrightarrow{Q_1Q_2} = \begin{pmatrix} -a + b \\ -a - b \end{pmatrix}$ — 1
- $\begin{pmatrix} -a + b \\ -a - b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 27 \end{pmatrix} = 0$ geeft $b = -2a$ — 1
- Het stelsel $\begin{cases} b = -2a \\ a^2 + b^2 = 125 \end{cases}$ geeft $a^2 = 25$ — 1
- De mogelijke coördinaten van Q zijn $(-5, 10)$ en $(10, 5)$ — 1

of

- $\tan(\angle P) = 3$ (met $\angle P$ de hoek tussen $\overrightarrow{OP}$ en de positieve x-as) dus $\angle P = 71,5...$ (°) — 1
- De richtingscoëfficiënt van de lijn door O en Q (met Q in het eerste kwadrant) is $\tan(\angle P - 45°) = 0,5$ — 1
- Dit geeft $b = 2a$ (dus de coördinaten van Q zijn $(a, 2a)$ met $a > 0$) — 1
- Dit combineren met $\left|\overrightarrow{OQ}\right| = 5\sqrt{5}$ geeft als eerste mogelijkheid $(10, 5)$ — 1
- Beide mogelijkheden voor $\overrightarrow{OQ}$ staan loodrecht op elkaar, dus de richtingscoëfficiënt voor de andere mogelijke lijn door O en Q is –2 (of: $\tan(\angle P + 45°) = -2$) — 1
- Dit combineren met $\left|\overrightarrow{OQ}\right| = 5\sqrt{5}$ geeft als tweede mogelijkheid $(-5, 10)$ — 1

of

- P ligt op de lijn met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 1
- S is de loodrechte projectie van Q op deze lijn, dan geldt (omdat OQS een gelijkbenige rechthoekige driehoek is en $\left|\overrightarrow{OQ}\right| = 5\sqrt{5}$) dat $\left|\overrightarrow{OS}\right| = 2\frac{1}{2}\sqrt{10}$ en dus geldt $t = 2\frac{1}{2}$ 1
- Dus $\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{2} \\ 7\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{OS}_L = \begin{pmatrix} -7\frac{1}{2} \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 1
- $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OS}_L = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix}$
  (dus mogelijke coördinaten van Q zijn $(-5, 10)$) 1
- $\overrightarrow{OS}_R = \begin{pmatrix} 7\frac{1}{2} \\ -2\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 1
- $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OS}_R = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ (dus mogelijke coördinaten van Q zijn $(10, 5)$) 1

of

- De richtingsvector van de lijn door O en Q is $\begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix}$ (voor zekere waarde van q) 1
- $\cos(\angle(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ})) = \dfrac{\begin{pmatrix} 9 \\ 27 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix}}{\sqrt{810} \cdot \sqrt{1+q^2}}$ ofwel $\frac{1}{2}\sqrt{2} = \dfrac{9+27q}{\sqrt{810} \cdot \sqrt{1+q^2}}$ 1
- Dit herleiden tot $2q^2 + 3q - 2 = 0$ 1
- Dit geeft $q = 0{,}5$ ($q = -2$ voldoet niet) 1
- De richtingsvector van de lijn door O en Q is $\begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$; dit combineren met $\left|\overrightarrow{OQ}\right| = 5\sqrt{5}$ geeft als eerste mogelijke coördinaten van Q $(-5, 10)$ (of $(10, 5)$) 1
- De andere mogelijke coördinaten van Q zijn $(10, 5)$ (of $(-5, 10)$) 1